Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 1

Rappels de mécanique

I. Cinématique du point . . . 1
II. Dynamique du point . . . 2
II.1. Les lois de Newton . . . 2
II.2. Forces usuelles . . . 2
II.3. Résolution d'un problème de mécanique . . . 3
II.4. Rotations et moments . . . 4
II.5. Lois de Kepler . . . 4
III. Approche énergétique . . . 5
III.1. Puissance et travail d'une force . . . 5
III.2. Énergie cinétique . . . 6
III.3. Énergie potentielle . . . 6
III.4. Énergie mécanique . . . 7
III.5. Mouvement conservatif . . . 7
IV. Mécanique du solide en rotation autour d'un axe fixe . . . 8
IV.1. Cinématique du solide . . . 8
IV.2. Dynamique du solide . . . 8
IV.3. Approche énergétique . . . 9
IV.4. Cas des systèmes déformables . . . 10

I. Cinématique du point

Le mouvement d'un point matériel $M(t)$ est toujours décrit par rapport à un référentiel.

En coordonnées cartésiennes, on exprime :

- le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$;
- le vecteur vitesse : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$;
- le vecteur accélération : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$.

En coordonnées cylindriques, on exprime :

- le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$;
- le vecteur vitesse : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$;
- le vecteur accélération : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$.

Application :

Retrouvons l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques.

II. Dynamique du point

II.1. Les lois de Newton

Première loi de Newton : principe d'inertie

Il existe des référentiels privilégiés, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels un point matériel isolé, soumis à aucune action mécanique, est :

- soit au repos ;
- soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Seconde loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

La **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ s'exprime :

Dans un référentiel galiléen, le **principe fondamental de la dynamique** (PFD) donne :

avec $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ la somme des forces extérieures appliquées au point matériel.

Dans le cas d'un point matériel de masse m constante, on obtient alors :

$$m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}.$$

Troisième loi de Newton : loi des actions réciproques

Soient M_1 et M_2 deux points matériels en interaction. La force exercée par le point 1 sur le point 2 est égale à l'opposé de la force exercée par le point 2 sur le point 1, soit :

II.2. Forces usuelles

Il est nécessaire de connaitre l'expression des forces usuelles en mécanique :

- le **poids** :

  avec $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, dirigée verticalement vers le bas, et de norme $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ en France ;
- la **réaction du support** $\vec{R} = \vec{R}_{\text{n}} + \vec{R}_{\text{t}}$, avec $\vec{R}_{\text{n}}$ la réaction normale au support et $\vec{R}_{\text{t}}$ la réaction tangentielle au support (de direction opposée à la vitesse) ;
- la **force de frottement fluide** $\vec{f}$, de direction opposée à la vitesse, dont la norme s'exprime :
  - pour des faibles vitesses : $f = k\,v$, avec k une constante ;
  - pour des vitesses importantes : $f = k\,v^2$, avec k une constante ;

- la **force de rappel d'un ressort** :

  avec k la constante de raideur, ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans le sens de l'allongement ;
- la **tension d'un fil** $\overrightarrow{T}$, seulement si le fil est tendu, dirigée dans la direction du fil ;
- la **poussée d'Archimède** :

  avec ρ_f la masse volumique du fluide déplacé et V son volume ;
- la **force gravitationnelle** entre deux masses m_1 et m_2 séparées d'une distance d :

  avec $G = 6{,}67.10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ la constante gravitationnelle et $\vec{u}_{1\to2}$ le vecteur unitaire allant de 1 vers 2 ;
- la **force électrostatique** entre deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance d :

  avec $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide et $\vec{u}_{1\to2}$ le vecteur unitaire allant de 1 vers 2.

II.3. Résolution d'un problème de mécanique

On rappelle la méthode classique pour aborder un problème de mécanique :

1. définir le système, préciser le référentiel et le système de coordonnées ;
2. faire un schéma ;
3. réaliser un bilan des forces et les représenter sur le schéma ;
4. appliquer le PFD ;
5. projeter l'équation obtenue selon les vecteurs de base du systèmes de coordonnées pour résoudre le problème.

Application :

> Un projectile de masse m est lancé en chute libre depuis l'origine O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. Déterminons l'expression de sa trajectoire et de sa portée.

II.4. Rotations et moments

Le **moment cinétique** en O d'un point matériel M de quantité de mouvement $\vec{p}$ s'exprime :

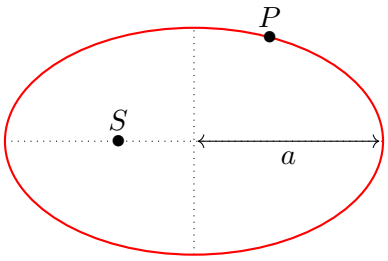
Le **moment d'une force** $\overrightarrow{F}$ en O appliquée au point M s'exprime :

Dans un référentiel galiléen, où le point O est fixe, le **théorème du moment cinétique** (TMC) s'écrit :

avec $\sum \overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{F}_{\text{ext}}\right)$ la somme des moments des forces extérieures appliquées au point matériel.

II.5. Lois de Kepler

Les **lois de Kepler** décrivent le mouvement des planètes du système solaire autour du Soleil. On note S le centre du Soleil, P le centre d'une planète, T sa période de révolution autour du Soleil, et a le demi-grand axe de sa trajectoire elliptique, comme représenté ci-dessous.



- **Première loi de Kepler** (loi des orbites) : les planètes du système solaire parcourent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- **Seconde loi de Kepler** (loi des aires) : pendant des intervalles de temps égaux, les aires balayées par le vecteur $\overrightarrow{SP}$ sont égales.
- **Troisième loi de Kepler** (loi des périodes) : le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ est constant pour toutes les planètes du système solaire.

En pratique, les orbites des planètes du système solaire sont quasi-circulaires. On peut alors montrer, en supposant une trajectoire circulaire de rayon R, que le mouvement d'une planète est uniforme et vérifie le rapport :

avec G la constante gravitationnelle et M_{S} la masse du Soleil.

III. Approche énergétique

III.1. Puissance et travail d'une force

La **puissance** d'une force $\vec{F}$ qui s'applique sur un point matériel de vitesse $\vec{v}$ est :

Le **travail élémentaire** de cette force sur un déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ pendant un instant $\mathrm{d}t$ est :

- le travail est **moteur** si $\delta W > 0$;
- le travail est **résistant** si $\delta W < 0$;
- le travail est **nul** si $\delta W = 0$.

Si la force est constante entre deux points A et B, alors le travail fourni est :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Application :

> On considère une bille de masse $m = 20\,\text{g}$ tombant le long d'un plan incliné de longueur $L = 1\,\text{m}$ faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Calculons les travaux du poids de la bille et de la réaction normale le long du plan incliné.

III.2. Énergie cinétique

L'**énergie cinétique** d'un point M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est :

Dans un référentiel galiléen, le **théorème de la puissance cinétique** donne :

avec $\sum P\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)$ la somme des puissances des forces extérieures appliquées au point matériel.

Dans un référentiel galiléen, le **théorème de l'énergie cinétique** entre les points A et B donne :

avec $\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)$ la somme des travaux des forces extérieures appliquées au point matériel.

Application :

Pour l'exemple précédent avec la bille, calculons la vitesse de la bille en bas du plan incliné à l'aide du théorème de l'énergie cinétique, en supposant que celle-ci est lâchée sans vitesse initiale en haut du plan incliné.

III.3. Énergie potentielle

Une force est **conservative** si son travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi, elle dérive alors d'une énergie potentielle E_{p} telle que :

On rappelle qu'une énergie potentielle est toujours définie à une constante près.

Les énergies potentielles usuelles en mécanique sont :

- l'énergie potentielle de pesanteur : $E_\text{p} = m\,g\,z + \text{cste}$ (pour un axe z orienté vers le haut) ;
- l'énergie potentielle élastique d'un ressort : $E_\text{p} = \dfrac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$;
- l'énergie potentielle gravitationnelle : $E_\text{p} = -G\,\dfrac{m_1\,m_2}{d} + \text{cste}$.

Application :

Exprimons l'énergie potentielle électrostatique d'une particule de charge q en présence d'une charge q_0 fixée en O, sachant que $\overrightarrow{\text{grad}}\,E_\text{p} = \dfrac{\text{d}E_\text{p}}{\text{d}r}\,\vec{e}_r$ dans cette géométrie en coordonnées sphériques.

III.4. Énergie mécanique

Dans un référentiel, l'**énergie mécanique** d'un point M soumis à une force conservative est :

Dans un référentiel galiléen, le **théorème de la puissance mécanique** donne :

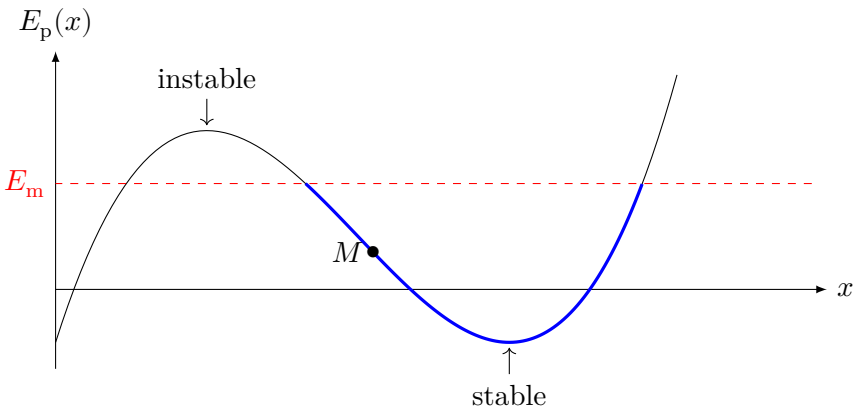
avec $\sum P\left(\vec{F}_\text{nc}\right)$ la somme des puissances des forces non-conservatives appliquées au point matériel.

Dans un référentiel galiléen, le **théorème de l'énergie mécanique** entre les points A et B donne :

avec $\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_\text{nc}\right)$ la somme des travaux des forces non-conservatives appliquées au point matériel. On en déduit que l'énergie mécanique d'un point se conserve s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives.

III.5. Mouvement conservatif

On considère le mouvement d'un point M dont l'énergie mécanique E_m se conserve, et on représente ci-dessous l'évolution de son énergie potentielle $E_\text{p}(x)$:



Pour la valeur de l'énergie mécanique considérée sur le graphique, on en déduit que le point M ne peut atteindre que les positions x de l'espace telles que $E_{\text{p}}(x) \leqslant E_{\text{m}}$. De plus, sa trajectoire est **bornée** et son mouvement est **périodique**, puisqu'il se trouve dans un **puits de potentiel**.

Une position d'équilibre pour le point correspond à un extremum d'énergie potentielle, on peut alors distinguer :

- une **position d'équilibre stable** qui correspond à un **minimum** d'énergie potentielle ;
- une **position d'équilibre instable** qui correspond à un **maximum** d'énergie potentielle.

IV. Mécanique du solide en rotation autour d'un axe fixe

IV.1. Cinématique du solide

Un **solide indéformable** est un système matériel pour lequel les distances entre les points qui le constituent restent constantes au cours du temps.

- Le solide est en translation si tous les points du solide ont la même vitesse instantanée dans le référentiel d'étude.
- Le solide est en rotation par rapport à un axe fixe si tous les points du solide sont en rotation autour de cet axe.

Lorsqu'un solide est lié à un axe lui permettant uniquement de réaliser une rotation autour de cet axe, on dit qu'il réalise une **liaison pivot** avec cet axe.

Pour une rotation autour d'un axe fixe Δ passant par le point O et de vecteur unitaire $\vec{u}_{\Delta}$, la vitesse d'un point M peut s'exprimer :

avec $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_{\Delta} = \dot{\theta}\,\vec{u}_{\Delta}$ le **vecteur vitesse de rotation**.

IV.2. Dynamique du solide

On considère un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ passant par le point O et de vecteur unitaire $\vec{u}_{\Delta}$.

Dans un référentiel, le **moment cinétique scalaire** du solide par rapport à l'axe Δ s'exprime :

avec J_{Δ} le **moment d'inertie** du solide par rapport à Δ (qui s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

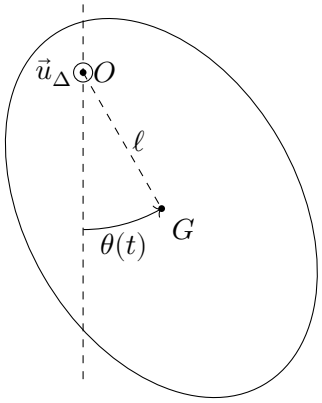
Le **moment scalaire d'une force** $\overrightarrow{F}$ appliquée en M par rapport à l'axe Δ s'exprime :

Dans un référentiel galiléen, le **théorème du moment cinétique** (TMC) donne :

avec $\sum M_{\Delta}\left(\overrightarrow{F}_{\text{ext}}\right)$ la somme des moments scalaires des forces extérieures appliquées au solide.

Application :

On considère un pendule pesant de masse m et de centre de gravité G, en rotation autour de l'axe Δ passant par le point O sur lequel il est maintenu. On note ℓ la distance OG et J_Δ son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ.
Déterminons sa période dans le cas des petites oscillations à l'aide du TMC.



Si un solide est soumis à un ensemble de forces $\overrightarrow{F_i}$ dont la résultante est nulle, on dit que ces forces exercent un **couple** sur le solide. Le moment de ces forces par rapport à un axe Δ est :

$$M_\Delta = \sum_i \left(\overrightarrow{OM}_i \wedge \overrightarrow{F_i}\right) \cdot \vec{u}_\Delta$$

il est qualifié de « couple » par abus de langage.

IV.3. Approche énergétique

La **puissance** associée au moment scalaire d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en M par rapport à l'axe Δ est :

Le **travail élémentaire** associé à ce moment scalaire sur une rotation dθ est :

L'**énergie cinétique** d'un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ est :

Dans un référentiel galiléen, le **théorème de la puissance cinétique** appliqué au solide donne :

avec $\sum M_{\Delta}\left(\overrightarrow{F}_{\text{ext}}\right)$ la somme des moments scalaires des forces extérieures appliquées au solide.

Dans un référentiel galiléen, le **théorème de l'énergie cinétique** appliqué au solide entre les positions θ_A et θ_B donne :

IV.4. Cas des systèmes déformables

Dans le cas d'un système déformable, c'est-à-dire un système de points, le **théorème de la puissance cinétique** dans un référentiel galiléen nécessite de prendre également en compte les forces intérieures au système :

avec $\sum P\left(\overrightarrow{F}_{\text{int}}\right)$ la somme des puissances des forces intérieures au système.

Dans le cas d'un solide indéformable, on retrouve l'expression précédemment obtenue puisque $\sum P\left(\overrightarrow{F}_{\text{int}}\right) = 0$.